

# PERANCANGAN METODE KONTROL LINEAR QUADRATIC INTEGRAL TRACKING (LQIT) UNTUK PENGENDALIAN POSISI SISTEM SUSPENSI SEDERHANA (MASS-SPRING-DAMPER)

Hanum Arrosida\* dan Albert Sudaryanto

Program Studi Teknik Komputer Kontrol, Jurusan Teknik, Politeknik Negeri Madiun

\*Corresponding author, e-mail: [hanumarrosida@pnm.ac.id](mailto:hanumarrosida@pnm.ac.id)

**Abstrak**— Kenyamanan diperlukan dalam berkendara. Salah satu caranya adalah dengan cara meminimalisir efek guncangan terhadap penumpang/kendaraan. Sistem suspensi dalam bahasan kali ini adalah model yang disederhanakan. Objektive kontrolnya adalah dapat mengontrol kendaraan melalui sistem suspensinya sedemikian rupa sehingga berada pada posisi yang diinginkan sekalipun terdapat jalan yang tidak rata yang dapat dianggap sebagai gangguan atau tambahan gaya pada sistem. Sistem suspensi sederhana terdiri dari massa (mass)-pegas(spring)-peredam (damper). Metode kontrol linear quadratic integral tracking di rancang untuk mengatasi gangguan pada sistem suspensi sederhana, metode ini merupakan pengembangan dari metode kontrol linear quadratic regulator (LQR) dengan penambahan kontroler integral (Integral Control) untuk mengeliminasi error steady state saat tracking berlangsung. Berdasarkan hasil pengujian secara simulasi, diperoleh data bahwa metode kontrol LQIT yang diterapkan mampu menjadikan tracking posisi pada sistem memiliki error steady state minimal dengan kriteria 3% dengan rise time 2 detik dan steady state time 3 detik, sehingga ketika terjadi gangguan yang menyebabkan pergeseran/perubahan posisi pada sistem suspensi, kontroler mampu mengendalikan sistem agar segera kembali pada posisi yang ditentukan sehingga gangguan/guncangan yang terjadi mampu diminimalisir.

**Kata Kunci** : Suspensi sederhana, LQIT, dan Tracking posisi.

**Abstract**— Comfortable is needed in driving. One of the way is minimize the effects of shocks on passengers/vehicles. The suspension system in this discussion is a simplified model. The objective control is to be able to control the vehicle through its suspension system so that it looks at the desired position there is an uneven path which can be regarded as an disturbance or additional force on the system. Simplified suspension system consists of mass -spring-damper. The linear quadratic integral tracking method is designed to overcome the disturbance of simplified suspension systems, this method is the development of the linear quadratic regulator method (LQR) with Integral Control to eliminate steady state errors during tracking. Based on simulation result, data obtained by LQIT control method that implements being able to track the position on the system and minimize steady state error at 3% with rising time 2 second and steady state time 3 second, so that if there is a disturbance that causes position changes on the suspension system, the controller is able to control the system to immediately return to desired position, So that interference / shock can be minimized.

**Keywords** : Simplified suspension, LQIT and Positon Tracking

Copyright © 2017 JNTE. All rights reserved

## 1. PENDAHULUAN

Penerapan teori kontrol optimal untuk pengaturan sistem linear banyak digunakan dalam dunia industri dan dunia pendidikan. Penggunaan kontrol optimal dengan cara meminimalkan fungsi energi yang digunakan, sehingga akan diperoleh indeks performansi optimal [1].

Sistem suspensi pada kendaraan digunakan untuk meredam efek guncangan/gangguan pada kondisi jalan yang tidak rata. Pada penelitian [2]

jenis suspensi yang digunakan adalah Suspensi aktif dengan komponen massa dan damper (peredam). Metode yang digunakan adalah *Linear Quadratic Regulator* (LQR). Penerapan metode LQR pada penelitian tersebut menjadikan sistem suspensi *Active Mass Damper* mampu kembali ke posisi yang diharapkan saat terjadi perubahan posisi suspensi akibat adanya gangguan., namun masih terdapat error steady state yang belum diatasi.

Permasalahan error steady state dapat diatasi dengan menambahkan kontroler integral.

Kontroler integral bekerja dengan cara menambahkan error integral output sebagai tambahan variable state [3].

Tujuan kontrol pada penelitian ini adalah dapat mengontrol kendaraan melalui sistem suspensinya sedemikian rupa sehingga berada pada posisi yang diinginkan dengan nilai error steady state kecil saat terjadi guncangan atau gangguan. Kontroler yang digunakan adalah linear quadratic integral tracking (LQIT) dimana kontroler ini merupakan modifikasi dari struktur kontroler linear quadratic tracking (LQT) dengan penambahan kontroler integral.

## 2. TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1. Linear Quadratic Tracking (LQT)

Linear Quadratic Regulator adalah suatu kontrol optimal pada sistem linear dengan dengan kriteria kuadratik untuk menyelesaikan permasalahan regulator. Sedangkan Linear Quadratic Tracking merupakan metode kontrol optimal pada sistem linear dengan kriteria kuadratik untuk menyelesaikan permasalahan tracking [4]. Bentuk umum dari persamaan keadaan adalah sebagai berikut:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

$$y = Cx \quad (2)$$

dengan,

$x_{n \times 1}$  : Keadaan (state) sistem

$u_{m \times n}$  : State input

$y_{1 \times 1}$  : State output

$A$  : Matriks sistem

$B$  : Matriks sistem

$C$  : Matriks output

Dengan meminimalisasi energy (cost function/quadratic function) melalui indeks performansi dalam interval  $[t_0, \infty]$  adalah:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (e^T Q e + u^T R u) dt \quad (3)$$

dengan,

$t_0$  : waktu awal

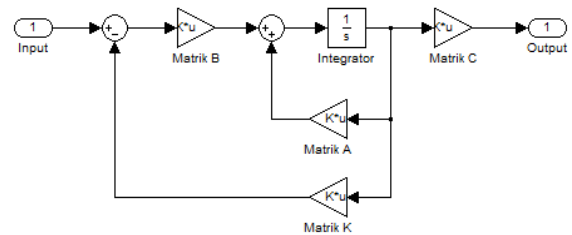
$\infty$  : waktu akhir

$Q$  : matriks semidefinit positif

$R$  : matriks definit positif

Persoalan regulator dan tracking dapat diselesaikan dengan menyelesaikan Persamaan Riccati sebagai berikut:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (4)$$



Gambar 1. Blok Diagram Kontrol Optimal

Untuk desain kontroler LQR dan LQT, di mana pemilihan matriks bobot  $Q$  dan  $R$  berpedoman pada:

Semakin besar harga  $Q$ , maka akan semakin dekat dengan titik minimumnya, dan Semakin besar harga  $R$ , maka semakin kecil/minimum energy yang digunakan. Gambar 1 menunjukkan diagram blok dari kontrol optimal. Diusahakan harga dari penyelesaian Persamaan Riccati merupakan matriks yang bernilai kecil, yaitu:

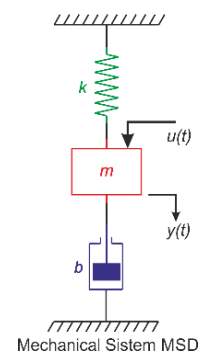
$$K = R^{-1}B^T P \quad (5)$$

$$u = -Kx \quad (6)$$

## 3. METODOLOGI

### 3.1. Pemodelan Sistem

Model suspensi kendaraan pada dasarnya adalah sistem mass-spring-damper dengan kendaraan yang berfungsi sebagai massa, coil suspensi sebagai pegas, dan shock absorber sebagai damper yang diasumsikan sistem linear, ditunjukkan pada Gambar 2.



Gambar 2. Sketsa Sistem

**Persamaan Gaya:**

Dengan mengacu pada hukum Newton II, menyatakan bahwa jika resultan gaya yang bekerja pada sebuah benda tidak sama dengan nol maka benda akan mengalami percepatan [5],

$$\begin{aligned}\sum F &= m \cdot a \\ u - bv - ky &= m \cdot a \\ u &= ma + bu + ky\end{aligned}\quad (7)$$

Dimana  $u$  adalah gaya ke bawah/sinyal kontrol (N),  $m$  adalah massa (kg),  $a$  adalah percepatan ( $m/s^2$ ),  $b$  adalah konstanta damper (Ns/m),  $k$  adalah konstanta spring (N/m), dan  $y$  adalah jarak posisi perpindahan massa dari titik awal sampai akhir (m) atau dapat dikatakan output.

**Persamaan Differensial:**

Telah diketahui sebelumnya bahwa  $y$  merupakan posisi dan  $u$  adalah sinyal kontrol maka dapat dikatakan bahwa  $\dot{x}$  merupakan kecepatan dan  $\ddot{x}$  merupakan percepatan sehingga persamaan (7) di atas menjadi:

$$u = m\ddot{y} + b\dot{y} + ky$$

**Persamaan State Space:**

Agar persamaan differensial mudah di hitung maka persamaan tersebut (7) dijadikan persamaan orde 1 dalam bentuk state space. Berikut adalah variabel state yang digunakan:

Asumsikan  $x_1 = y$  sehingga nilai  $x_2 = \dot{y}$  adalah turunan pertama dari  $x_2 \rightarrow \dot{y} = \dot{x}_2$

Sehingga apabila persamaan differensial di rubah menjadi persamaan state maka:

$$\begin{aligned}u &= m\ddot{y} + b\dot{y} + ky \\ u &= m\dot{x}_2 + bx_2 + kx_1 \\ m\dot{x}_2 &= u - bx_2 - kx_1 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{u}{m}\end{aligned}$$

Secara lengkap persamaan state spacenya adalah sebagai berikut:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (8)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{u}{m} \quad (9)$$

Persamaan Outputnya adalah:

$$y = x_1$$

**3.2. Pemodelan Kontroler LQIT**

Kontroler LQR didesain untuk membuat state menuju ke zero. Hal ini membuat terbatasnya kasus tracking, di mana keluaran sistem dipaksa sesuai dengan nilai yang diinginkan.

Sistem beserta keluarannya mempunyai persamaan

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}\quad (10)$$

Ketika reference  $r$  merupakan kombinasi dari  $x^-$  dan  $u^-$  maka nilai  $y = r$  Sehingga Matrix  $A$  harus invertible (non-zero-eigen values).

Pendekatan intuitive untuk membuat *output*  $y$  mengikuti *referensi*  $r$  yang menggantikan persamaan state pada LQR Menjadi persamaan state baru

$$\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + B\bar{u} = 0 \Rightarrow \bar{x} = -A^{-1}B\bar{u} \quad (11)$$

$$\bar{y} = C\bar{x} = r$$

$$\bar{y} = C(-A^{-1}B\bar{u}) = -CA^{-1}B\bar{u} = r$$

$$\bar{u} = -[CA^{-1}B]^{-1}r \quad (12)$$

Didefinisikan

$$\tilde{x} = x - \bar{x} \text{ dan } \tilde{u} = u - \bar{u} \quad (13)$$

Sehingga didapatkan state

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u} \quad (14)$$

Dengan index performasi

$$J = \int_0^{\infty} \tilde{x}^T Q \tilde{x} + \tilde{u}^T R \tilde{u}, \quad Q \geq 0, \text{ dan } R \geq 0 \quad (15)$$

Optimal Feedback Law

$$\tilde{u} = -K\tilde{x} \text{ sehingga}$$

$$\tilde{u} = u - \bar{u} \Rightarrow u = \bar{u} + \tilde{u} \Rightarrow \dots$$

$$u = \bar{u} + \tilde{u}$$

$$u = \bar{u} + (-K\tilde{x})$$

$$u = \bar{u} - K(x - \bar{x}) \quad (16)$$

Dimana nilai  $K$  adalah

$$K = R^{-1}B^T S \quad (17)$$

Dan  $S$  didapatkan dari Solusi Riccati

$$0 = A^T S + SA - SBR^{-1}B^T S + Q \quad (18)$$

Dengan memasukkan nilai  $u^-$  dan  $x^-$  maka didapatkan hasil

$$\begin{aligned} u &= -Kx + [KA^{-1}B - I](CA^{-1}B)^{-1}r \\ u &= -Kx + Fr \\ u &= \bar{u} - K(x - \bar{x}) \\ u &= -[CA^{-1}B]^{-1}r - K(x - (-A^{-1}B\bar{u})) \\ u &= -Kx - KA^{-1}B\bar{u} - [CA^{-1}B]^{-1}r \\ u &= -Kx - KA^{-1}B(-[CA^{-1}B]^{-1}r) - [CA^{-1}B]^{-1}r \\ u &= -Kx + KA^{-1}B[CA^{-1}B]^{-1}r - [CA^{-1}B]^{-1}r \\ u &= -Kx + [KA^{-1}B - I](CA^{-1}B)^{-1}r \\ u &= Kx + Fr \text{ dimana } F = [KA^{-1}B - I](CA^{-1}B)^{-1} \end{aligned}$$

Penambahan aksi Integral pada control klasik berguna untuk mengeliminasi error steady state saat tracking berlangsung. Kontrol integral dapat dibuat pada permasalahan linear quadratic (LQ) dengan menambahkan error integral output sebagai tambahan variable state. Error Integral output didapatkan dari penurunan error antara output dan referensi.

$$\dot{w} = r - y$$

$$\dot{w} = r - Cx$$

### Kontrol Optimal Tracking dengan Aksi Integral

Didefinisikan Augmented state error

$$\tilde{x} = A\tilde{x} + B\tilde{u}$$

$$\dot{w} = r - Cx$$

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ w \end{bmatrix}$$

Sehingga dihasilkan state matrix

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ w \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} \tilde{u}$$

Dengan index performansi

$$J = \int_0^{\infty} \tilde{x}^T Q \tilde{x} + \tilde{u}^T R \tilde{u}, \quad Q \geq 0, \text{ dan } R \geq 0$$

Sinyal Kontrol Optimal

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= -K\hat{x} \text{ dengan} \\ K &= R^{-1}\hat{B}^T S = \begin{bmatrix} K_x & K_w \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dan solusi Riccati

$$0 = \hat{A}^T S + S\hat{A} - \hat{S}\hat{B}R^{-1}\hat{B}^T S + Q$$

$$u = \bar{u} + \tilde{u}$$

$$u = \bar{u} - K\hat{x}$$

$$u = \bar{u} - \begin{bmatrix} K_x & K_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ w \end{bmatrix}$$

$$u = \bar{u} - K_x \tilde{x} - K_w w$$

Karena

$$\tilde{x} = x - \bar{x} \text{ Maka } u = \bar{u} - K_x(x - \bar{x}) - K_w w$$

Diketahui sebelumnya bahwa

$$\bar{u} = -[CA^{-1}B]^{-1}r$$

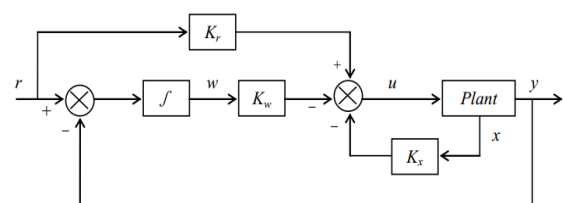
$$\bar{x} = -A^{-1}B\bar{u}$$

Sehingga sinyal Kontrolnya adalah

$$\begin{aligned} u &= (-[CA^{-1}B]^{-1}r) - K_x(x - (-A^{-1}B(-[CA^{-1}B]^{-1}r))) - K_w w \\ u &= -[CA^{-1}B]^{-1}r - K_x x + K_x A^{-1}B[CA^{-1}B]^{-1}r - K_w w \\ u &= -K_x x - K_w w + (K_x A^{-1}B - I)[CA^{-1}B]^{-1}r \\ u &= -K_x x - K_w w + K_r r \end{aligned}$$

### 3.3. Perancangan Simulasi Kontroler Linear Quadratic Integral Tracking

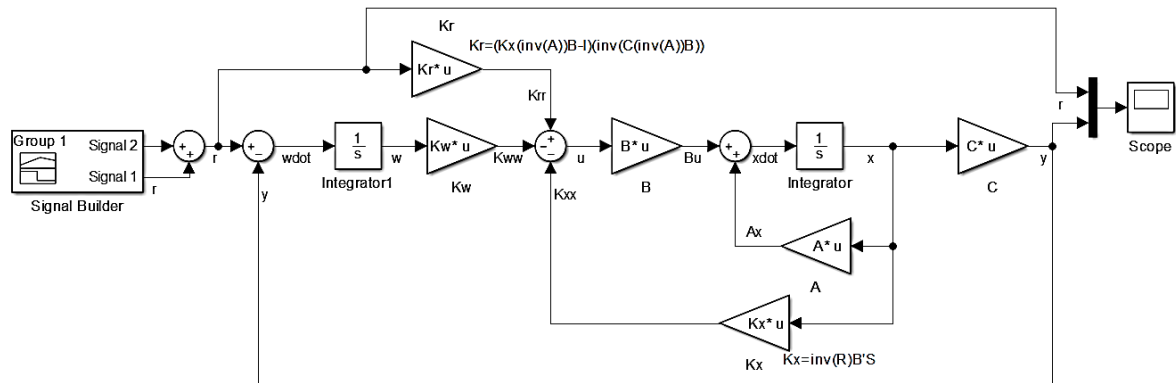
Struktur kontroler linear quadratic integral tracking (LQIT) terdiri dari kontroler linear quadratic tracking dengan penambahan kontroler integral untuk meminimalisir nilai error steady state, ditunjukkan pada Gambar 3.



Gambar 3. Blok Diagram Struktur Kontroler LQIT

### 3.4. Pembuatan Simulasi Kontroler Linear Quadratic Integral Tracking di Matlab

Kontroler LQIT yang diterapkan pada sistem, disimulasikan melalui software matlab menggunakan simulink dan program melalui m.file. Gambar 4 menunjukkan desain kontroler sistem menggunakan blok simulink



Gambar 4. Blok Diagram Struktur Kontroler LQIT

### Program pada matlab

%Parameter Sistem MSD

m=2; %massa

k=8; %Spring

b=6; %Damp

%Matrix Pada state

A=[0 1;-k/m -b/m];

B=[0;1/m];

C=[1 0];

%Bobot

Q=[1 0;0 1];

R=10;

[S,eig,G] = care(A,B,Q) %Riccati 0=A'S+SA-SB(inv R)B'S+Q

Kx=inv(R)\*B'\*S %Fbck Gain Kx

Kr=(Kx\*(inv(A))\*B-

eye(1))\*(inv(C\*(inv(A))\*B))

Ahat=[0 1 0;-k/m -b/m 0;1 0 0]

Bhat=[0;1/m;0]

%Bobot hat

Qhat=[1 0 0;0 1 0;0 0 1];

Rhat=6;

[Shat,eighat,Ghat]

care(Ahat,Bhat,Qhat) %Riccati 0=A'S+SA-SB(inv R)B'S+Q

Khat=inv(Rhat)\*Bhat'\*Shat

Kw=Khat(:,3)

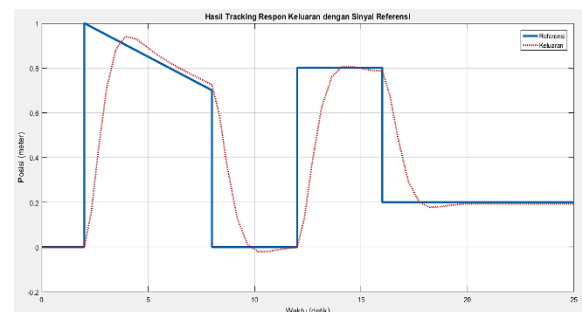
## 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

### Hasil Tracking Respon Keluaran dengan Sinyal Referensi

Pengujian kontroler yang diterapkan pada sistem dilakukan pada kondisi yang berbeda, dengan asumsi gangguan/guncangan pada

sistem suspensi berubah-ubah. Pada Gambar 5 garis biru menyatakan nilai referensi yang ditentukan, sedangkan garis warna merah menunjukkan respon sistem dengan kontroler LQIT.

Berdasarkan hasil pengujian diketahui bahwa sistem dengan kontroler LQIT mampu tracking posisi sesuai dengan referensi yang ditentukan dengan waktu yang cepat yaitu rise time 2 detik dan waktu untuk mencapai posisi steady state adalah 3 detik. Pada respon transien sistem diketahui bahwa nilai error steady state adalah 3%, nilai ini menunjukkan kondisi yang baik dengan rata-rata error steady state 3% mengindikasikan bahwa saat terjadi guncangan pada kendaraan yang menyebabkan perubahan posisi pada sistem suspensi, kontroler yang diterapkan mampu membawa sistem suspensi untuk tracking posisi secara tepat sehingga gangguan/guncangan yang terjadi mampu diredam dengan baik.



Gambar 5. Hasil Tracking Respon Keluaran dengan Sinyal Referensi

## 5. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pengujian secara simulasi dapat disimpulkan bahwa kontroler Linear

Quadratic Integral Tracking (LQIT) yang diterapkan pada sistem suspensi sederhana yang terdiri dari massa (mass)-pegas(spring)-peredam (damper) mampu mengatasi adanya gangguan/guncangan dengan respon tracking yang sesuai dengan referensi dengan waktu yang cepat yaitu rise time 2 detik dan waktu untuk mencapai posisi steady state adalah 3 detik serta memiliki nilai rata-rata error steady state 3%.

#### DAFTAR PUSTAKA

- [1] Gamayanti, Nurlita. "Diktat Kuliah Dasar Sistem Pengaturan." Teknik Elektro Institut Teknologi Sepuluh Nopember.
- [2] Jalili-Kharaajoo, Mahdi, et al. "Application of linear quadratic regulator (LQR) in displacement control of an active mass damper." IEEE Conference on Control Applications. Vol. 30. No. 8. 2003.
- [3] Triwiyatno, Aris, et al. "Engine Torque Control of SI Engine using Linear Quadratic Integral Tracking (LQIT) Optimal Control." IPTEK The Journal for Technology and Science 22.4 (2011).
- [4] Arrosida, Hanum. "Perancangan Metode Kontrol LQR (Linear Quadratic

Regulator) Sebagai Solusi Optimal Pengendalian Gerak Quadrotor." Seminar MASTER 2016. Vol. 1. No. 1. 2016.

- [5] Ogata, K. *Modern Control Engineering*, 4<sup>th</sup> edition, Prentice-Hall, New Jersey (2002).

#### Biodata Penulis

**Hanum Arrosida**, Dosen di Politeknik Negeri Madiun, mengajar pada Program Studi Teknik Komputer Kontrol di Jurusan Teknik. Dosen muda ini lulus D4 Teknik Elektronika di Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS) pada tahun 2013, pada tahun yang sama melanjutkan studi Magister S2 Teknik Sistem Pengaturan di Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) dan berhasil menyelesaikan studi S2 pada Tahun 2015.

**Albert Sudaryanto**, Dosen di Politeknik Negeri Madiun, mengajar pada Program Studi Teknik Komputer Kontrol di Jurusan Teknik. Lulus D4 Teknik Elektronika di Politeknik Elektronika Negeri Surabaya (PENS) pada tahun 2013, dan melanjutkan studi Magister S2 Teknik Sistem Pengaturan di Institut Teknologi Sepuluh Nopember (ITS) pada tahun 2015.